МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Учебно-методический комплект по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Конспект лекции «Вейвлет-преобразование»

В.В. Леонидов

МГТУ имени Н.Э. Баумана

1 Введение

Ранее для анализа нестационарных сигналов мы рассматривали такой инструмент спектрального анализа, как частотно-временное преобразование Фурье. Мы брали окно фиксированной ширины, разбивали исследуемый сигнал на участки, равные ширине данного окна, брали ДПФ от каждого такого участка, а затем строили график в трёхмерной системе координат, показывающий, какие частотные составляющие в какой момент времени присутствуют в исследуемом сигнале. В качестве недостатка такого преобразования мы отметили неопределённость: чем уже окно, тем лучше разрешение по времени и хуже по частоте; чем шире окно – тем лучше разрешение по частоте и хуже по времени. В случае, если в сигнале частоты по времени распределены неравномерно, этот метод не очень подходит, в таких случаях используют **Вейвлет-преобразование (Wavelet transform)**, которое позволяет иметь хорошее разрешение по времени на высоких частотах, а на низких – по частоте.

Давайте в очередной раз вспомним, что из себя представляет преобразование Фурье в тригонометрической форме записи:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\cos\frac{2\pi nm}{N} - j\sin\frac{2\pi nm}{N} \right) \tag{1}$$

Можно сказать, что это корреляция исследуемого сигнала $x[n]$ с набором синусоид и косинусоид с частотами $m \cdot f_s/N$, где m – индекс частоты, f_s – частота дискретизации, N – количество отсчётов.

Идея вейвлет-преобразования схожа, только вместо набора синусоид и косинусоид будут использоваться другие функции, которые называются **вейвлетами**.

2 Вейвлеты

В переводе с английского вейвлет (wavelet) – это «маленькая волна», а по факту – это математическая функция (обозначим её $\Psi(t)$), которая должна удовлетворять следующим условиям:

1. Среднее значение функции должно быть равно нулю (площадь под графиком, находящимся ниже оси x должна быть равна площади под графиком, находящимся над осью x):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)dt = 0 \tag{2}$$

2. Функция должна обладать конечной энергией (иными словами, она должна быть локализована на временной оси):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty \tag{3}$$

Рассмотрим несколько таких функций. Возьмём косинусоидальный сигнал, который умножим на Гауссову функцию, а затем построим график полученного сигнала и его ДПФ:

Листинг 1 – Построение вейвлета Морле

```
clear, clc, close all
```

```
fs = 50;
T = 5;
ts = -T:1/fs:T-1/fs;

c = cos(2*pi*ts);         %косинусоида
g = exp(-ts.^2/2);        %Гауссова функция
w = c.*g;                 %произведение Гаусса на синусоиду

subplot(4,1,1)
plot(ts, c), grid on
title('Косинусоидальный сигнал')
xlabel('Время'),ylabel('Амплитуда')

subplot(4,1,2)
plot(ts, g), grid on
title('Гауссова функция')
xlabel('Время'),ylabel('Амплитуда')

subplot(4,1,3)
plot(ts, w), grid on
title('Вейвлет Морле')
xlabel('Время'),ylabel('Амплитуда')

%ДПФ вейвлета
W = abs(fft(w));
N = length(w);
f = 0:fs/N:fs-fs/N;

subplot(4,1,4)
plot(f(1:N/2),W(1:N/2)), grid on
title('ДПФ вейвлета Морле')
xlabel('Частота'),ylabel('Амплитуда')
```

Результат показан на рисунке 1. Полученная функция называется **вейвлетом Морле**. И она действительно удовлетворяет сформулированным выше условиям. Если посмотреть на график ДПФ, увидим что-то, напоминающее узкополосный фильтр, который позволяет выделить из анализируемого сигнала заданную частоту.

Если взять вторую производную от Гауссовой функции `g`, получим ещё один вейвлет, который из-за своей

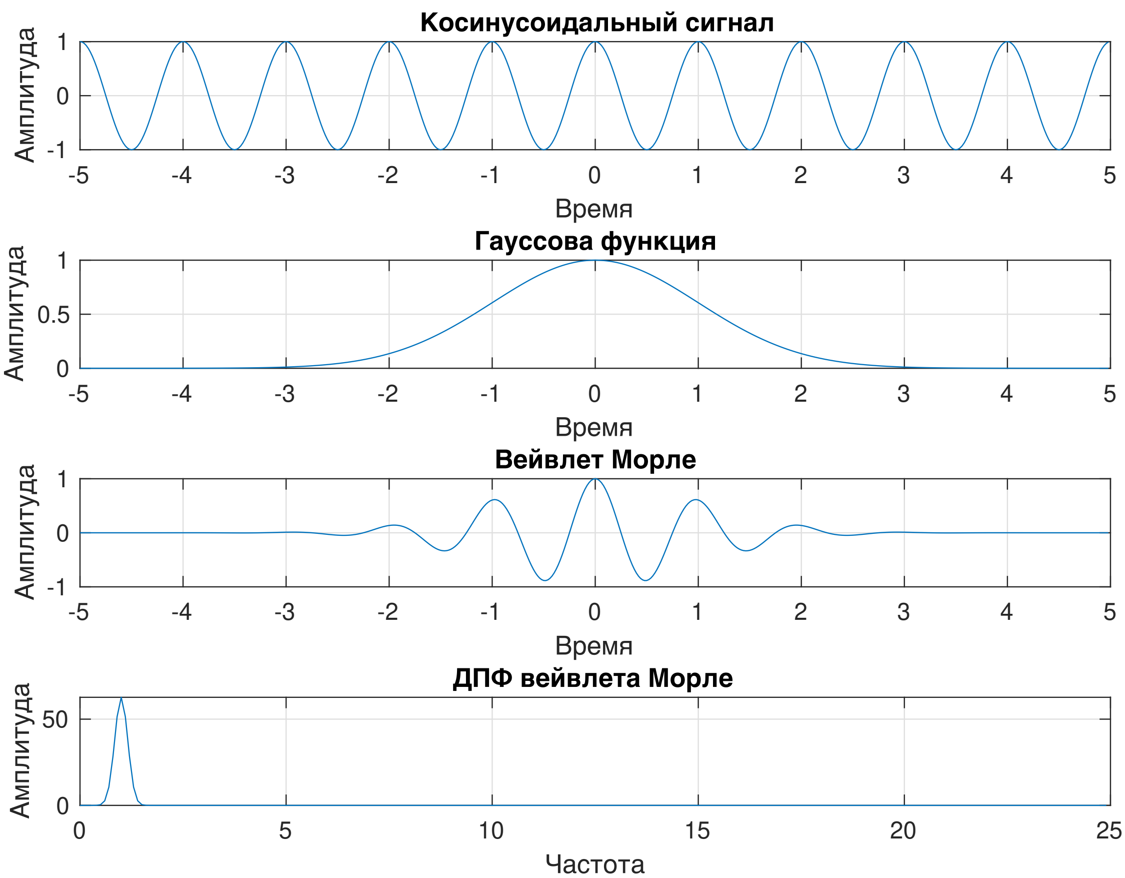

Рис. 1 – Получение вейвлета Морле

причудливой формы называется **«Мексиканская шляпа»**:

Листинг 2 – Построение вейвлета "Мексиканская шляпа"

```
clear, clc, close all

fs = 50;
T = 5;
ts = -T:1/fs:T-1/fs;

g = exp(-ts.^2/2);            % Гауссова функция
dg = -diff(g,2);              % вторая производная от Гауссовой функции

subplot(2,1,1)
plot(ts(1:length(ts)-2), dg), grid on
title('Вейвлет Мексиканская" шляпа"')
```

```
xlabel('Время'),ylabel('Амплитуда')

%ДПФ вейвлета
W = abs(fft(dg));
N = length(dg);
f = 0:fs/N:fs-fs/N;

subplot(2,1,2)
plot(f(1:N/2),W(1:N/2)), grid on
title('ДПФ вейвлета Мексиканская" шляпа"')
xlabel('Частота'),ylabel('Амплитуда')
```

График вейвлета «Мексиканская шляпа» показан на рисунке 2. Действительно, похоже на шляпу. Спектр

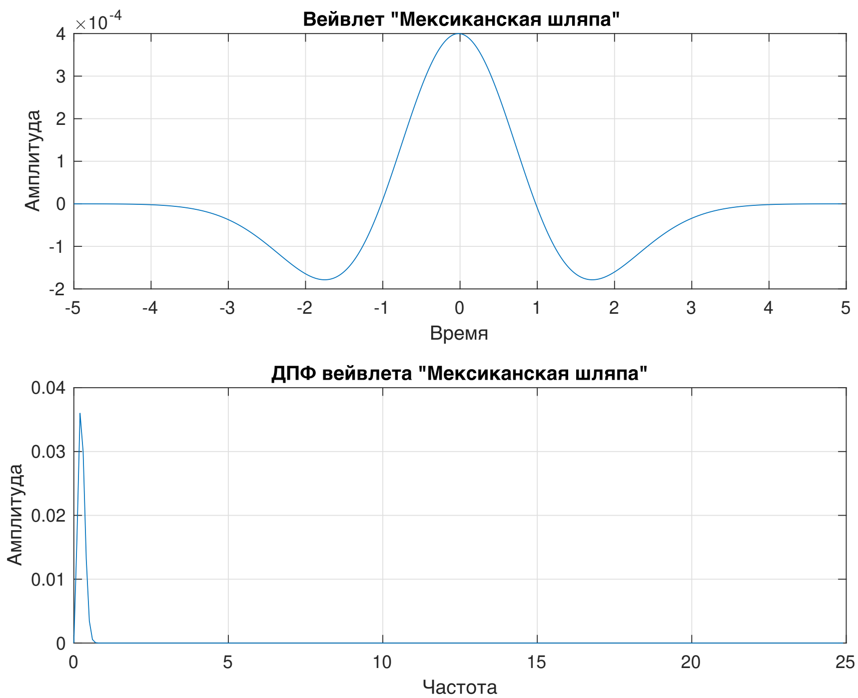

Рис. 2 – Вейвлет «Мексиканская шляпа»

данного вейвлета также похож на узкополосный фильтр, но имеет более узкую полосу пропускания, чем у вейвлета Морле.

И ещё один вейвлет, который мы рассмотрим – это дискретный **вейвлет Хаара**. Он представляется выражением:

$$\Psi[x] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \le x < 1/2. \\ -1, & \text{при } 1/2 \le x < 1. \\ 0, & \text{при } x \notin [0,1). \end{cases} \tag{4}$$

Проиллюстрируем выражение (4) с помощью Matlab, а заодно построим ДПФ вейвлета Хаара:

Листинг 3 – Построение вейвлета Хаара

```
clear, clc, close all

fs = 100;
T = 1.5;
ts = -T:1/fs:T-1/fs;
N = length(ts);

x = zeros(1,N);
x((ts >= 0) & (ts < 0.5)) = 1;
x((ts >= 0.5) & (ts < 1)) = -1;

plot(ts, x, 'LineWidth',2), grid on
title('Дискретный вейвлет Хаара')
xlabel('Время'),ylabel('Амплитуда')
```

Полученный результат показан на рисунке 3. Наверняка вы обратили внимание, что спектр данного вейвлета имеет уже знакомую нам форму функции $sin(x)/x$, это связано с его прямоугольной формой.

Существует большое множество вейвлетов, мы рассмотрели самые базовые из них. Теперь давайте разбираться, что с ними делать.

3 Вейвлет-преобразование

Из каждой рассмотренной выше функции (назовём их материнскими вейвлетами) можно составить целые семейства вейвлетов. Каждый материнский вейвлет можно, во-первых, масштабировать (растянуть или сжать), а во-вторых, сдвинуть влево или вправо вдоль временной оси. Таким образом, вейвлет можно записать в виде следующей функции:

$$\Psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \tag{5}$$

где a – масштаб, τ – временной сдвиг. Теперь, по аналогии с ДПФ, запишем выражение для вейвлет-преобразования:

$$W(a,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Psi^*_{a,\tau}(t)dt \tag{6}$$

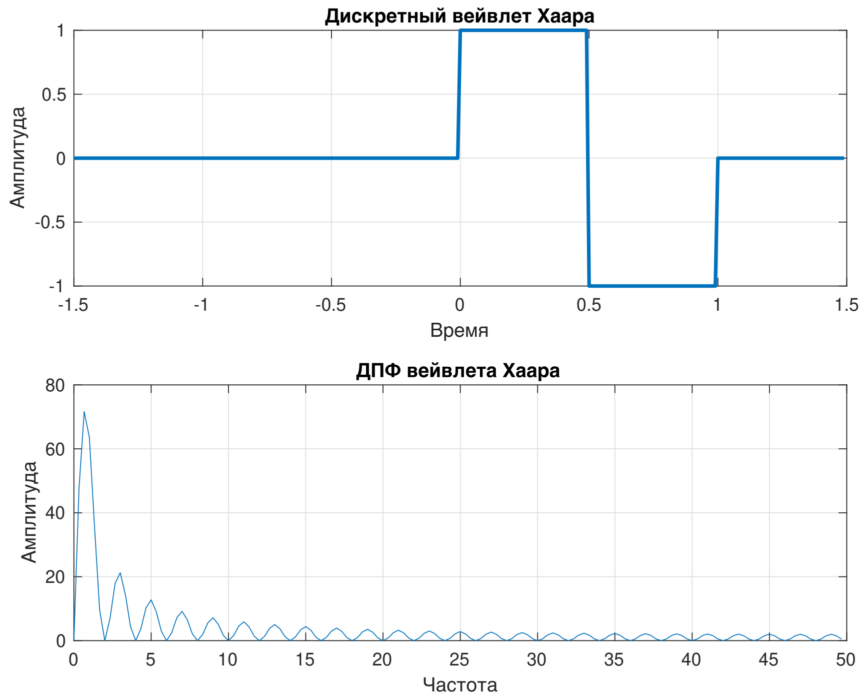

Рис. 3 – Вейвлет Хаара

где $x(t)$ – анализируемый сигнал, $\Psi^*_{a,\tau}$ – комплексно-сопряженный вейвлет.

Получается, что в процессе вейвлет-преобразования мы находим корреляцию исходного сигнала с набором вейвлетов, каждый из которых имеет различный масштаб и сдвиг относительно начала исследуемого сигнала. В случае, если сигнал на каком-либо участке похож на заданный вейвлет с заданным масштабом, мы увидим всплеск функции $W(a, \tau)$.

Чтобы понять разницу между частотно-временным ДПФ и вейвлет-преобразованием, нужно взглянуть на рисунок 4. На нём показано разбиение частотно-временной плоскости на анализируемые участки, имеющие одинаковую площадь. В случае с ДПФ, все участки одинаковы по форме, что приводит к вышеупомянутой неопределённости. В случае с вейвлет-преобразованием, на низких частотах анализируются длинные отрезки времени (получаем хорошее разрешение по частоте), а на высоких частотах анализируются короткие отрезки времени (в результате чего получаем хорошее разрешение по времени).

Не нужно лишних слов, перейдём к примеру. Как мы делали на лекции по частотно-временному преобразованию Фурье, создадим сигнал, состоящий из трёх друг за другом идущих синусоид с частотами *10 Гц*, *20 Гц* и *30 Гц*, построим график ДПФ данного сигнала, а затем воспользуемся функцией `cwt` Matlab, чтобы произвести вейвлет-преобразование. В качестве вейвлета выберем вейвлет Морле.

Листинг 4 – Вейвлет-преобразование для нестационарного сигнала

```
clear, clc, close all

fs = 100;
```

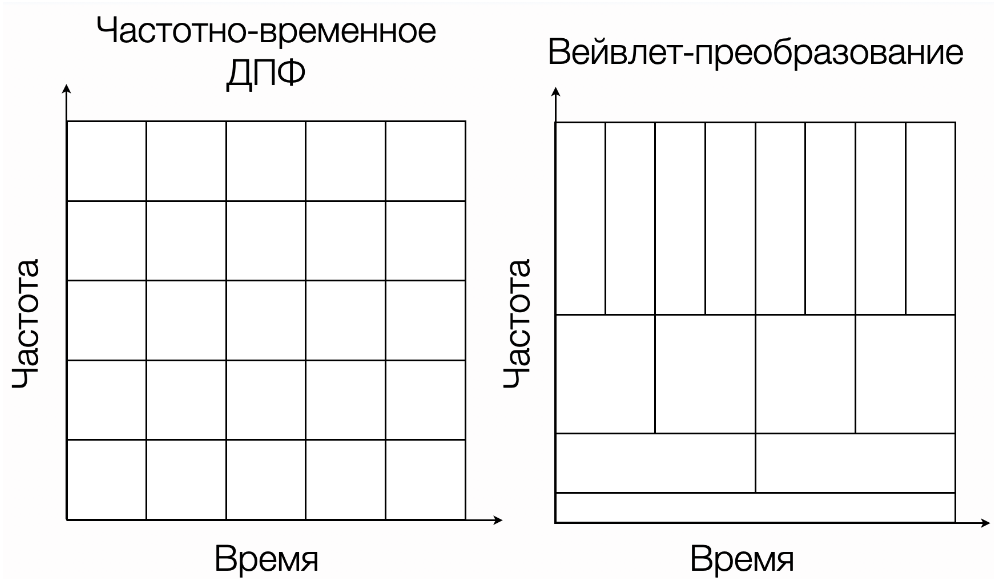

Рис. 4 – Сравнение частотно-временного преобразования Фурье и Вейвлет-преобразования

```

f1 = 10;
f2 = 20;
f3 = 30;

% Задаём сигнал с тремя подряд идущими частотами
t1= 0 : 1/fs : 1-1/fs;
lt1 = length(t1);
x(1 : lt1)=sin(2*pi*10*t1);

t2= 1 : 1/fs : 2-1/fs;
lt2 = length(t2);
x(lt1 + 1 : lt1 + lt2) = sin(2*pi*20*t2);

t3= 2 : 1/fs : 3-1/fs;
lt3 = length(t3);
x(lt1 + lt2 + 1 : lt1 + lt2 + lt3) = sin(2*pi*30*t3);

t = [t1 t2 t3];
N = length(t);

subplot(2,1,1)
plot(t,x), grid on, title('Сигнал с тремя подряд идущими частотами')
```

```
xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')

X = 2*abs(fft(x))/N;
f = 0: fs/N : fs-fs/N;

subplot(2,1,2)
stem(f,X), grid on, title('Спектр данного сигнала')
xlabel('Частота'), ylabel('Амплитуда')

figure
cwt(x,'amor',fs)
```

Запустим скрипт и посмотрим на результаты. Нестационарный сигнал `x` и его ДПФ показаны на рисунке 5. Вейвлет-преобразование от сигнала `x` показано на рисунке 6. Серым цветом на графике показана зона недо-

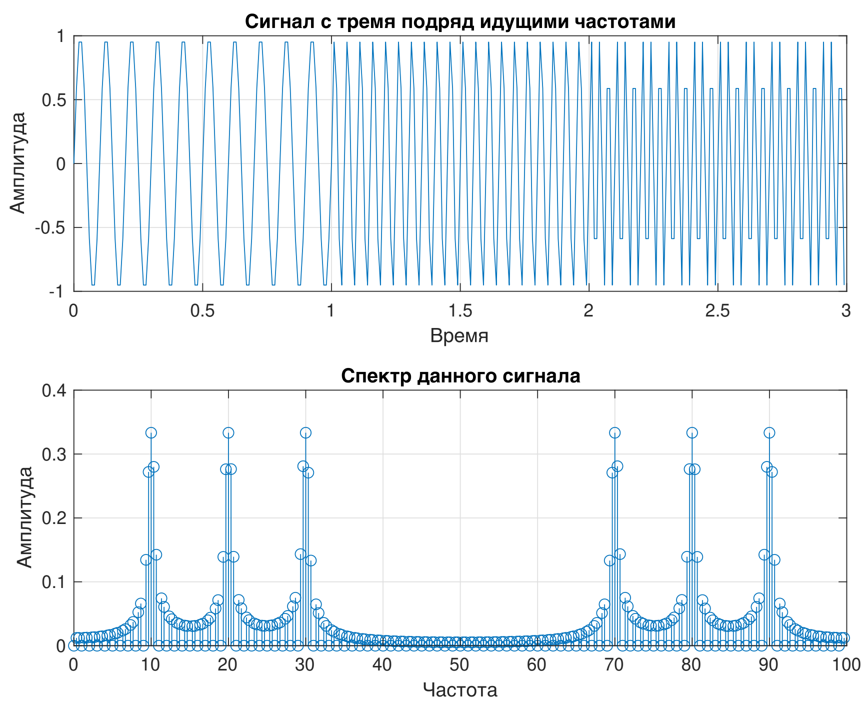

Рис. 5 – Сигнал с подряд идущими частотами 10 Гц, 20 Гц и 30 Гц, и его ДПФ

стоверности, которая связана с краевым эффектом вейвлет-преобразования. На графике отчётливо видны три частотные составляющие с частотами, которые были заданы в скрипте (можете проверить с помощью курсоров – следует учесть, что шкала частоты нелинейная).

В Matlab имеется возможность управлять набором фильтров (вейвлетов), которые будут использоваться функцией `cwt`. Например, мы знаем, что наш сигнал находится в диапазоне от *10* до *30 Гц* и хотим проанализировать его с набором вейвлетов, соответствующих этому диапазону частот. Для этого можно дополнить

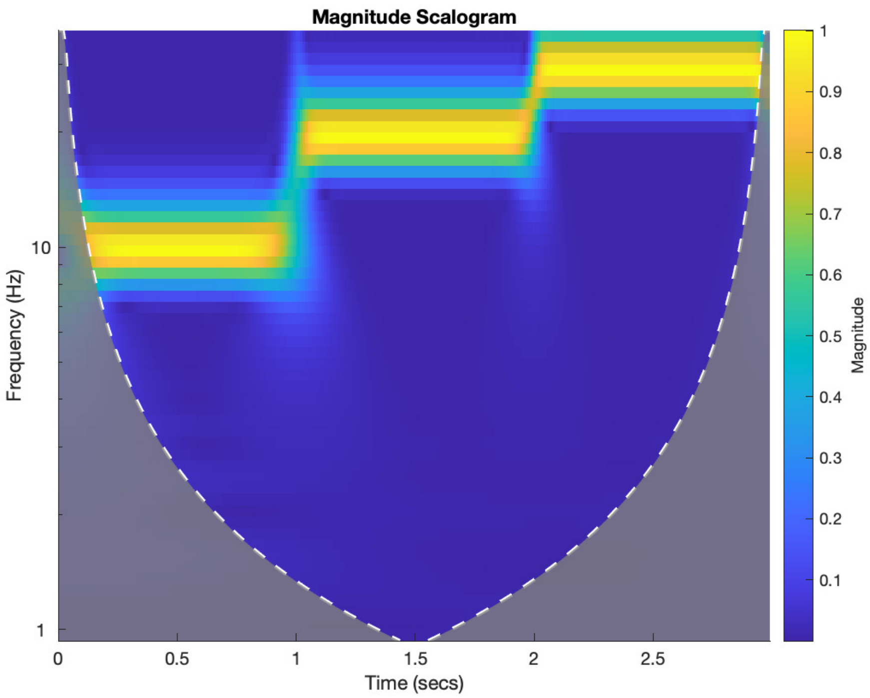

Рис. 6 – Вейвлет-преобразование от сигнала `x`

предыдущий листинг следующим образом:

Листинг 5 – Вейвлет-преобразование для нестационарного сигнала

```
% формируем набор фильтров
fb = cwtfilterbank('SignalLength',numel(x),'SamplingFrequency',fs,...
    'FrequencyLimits',[10 30]);
figure
freqz(fb)

% применяем сформированный набор фильтров
figure
cwt(x,'FilterBank',fb)
```

В результате получим набор АЧХ сформированных фильтров (рисунок 7) и вейвлет-преобразование с применением этих фильтров (рисунок 8).

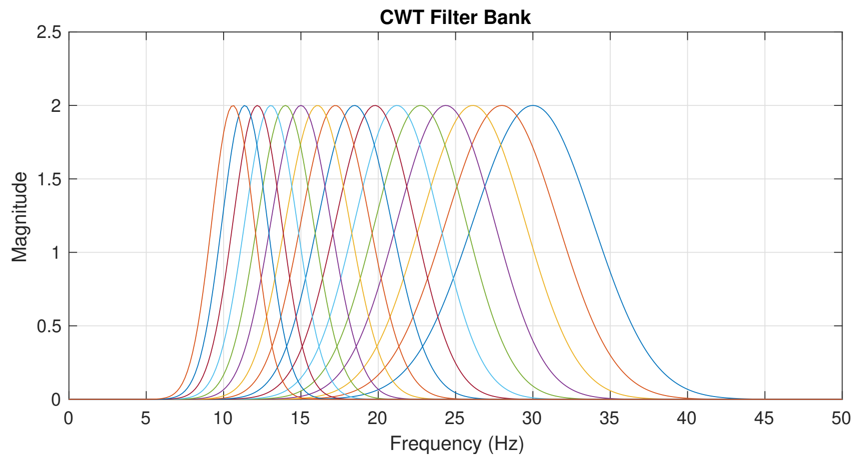

Рис. 7 – АЧХ набора фильтров для вейвлет-преобразования: вейвлеты Морле с частотой от 10 до 30 Гц

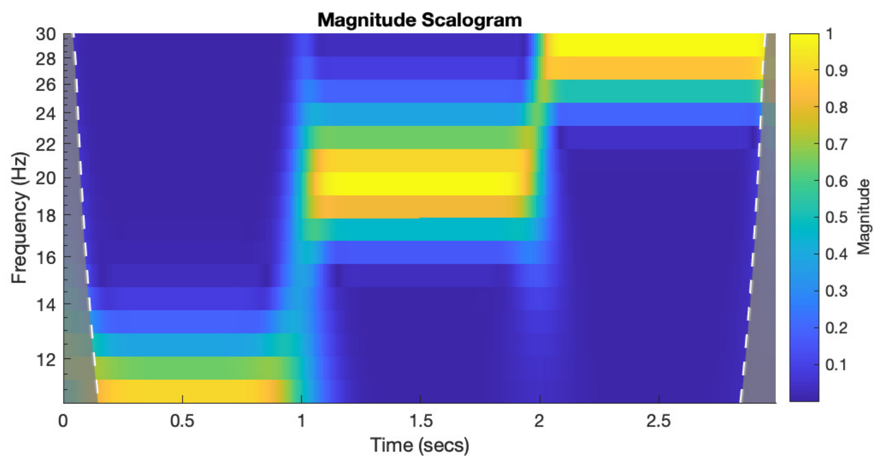

Рис. 8 – Вейвлет-преобразование с использованием набора фильтров

С помощью вейвлет-анализа также можно определить разрывы функции. Давайте создадим синусоидальный сигнал частотой *5 Гц* и частотой дискретизации *100 Гц* и попробуем убрать из него всего один отсчёт.

Листинг 6 – Определение разрывов функции

```
clear, clc, close all

fs = 100;
ts = 0: 1/fs : 3-1/fs;

x = sin(2*pi*5*ts);

% убираем из сигнала отсчёт с индексом 100
x(100) = [];

```

```
subplot(2,1,1)
plot(ts(1:length(ts)-1),x), grid on, title('Синусоида с разрывом')
xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')

% чтобы построить результаты функции cwt внутри subplot,
% приходится немного потанцевать с бубном
subplot(2,1,2)
[cfs,frq] = cwt(x,'amor',fs);
tms = (0:numel(x)-1)/fs;
surface(tms,frq,abs(cfs))
axis tight
shading flat
title('Вейвлетпреобразование-')
xlabel('Время'), ylabel('Частота')
```

Давайте посмотрим на результат (рисунок 9). И что мы видим? Мы убрали всего один отсчёт из синусои-

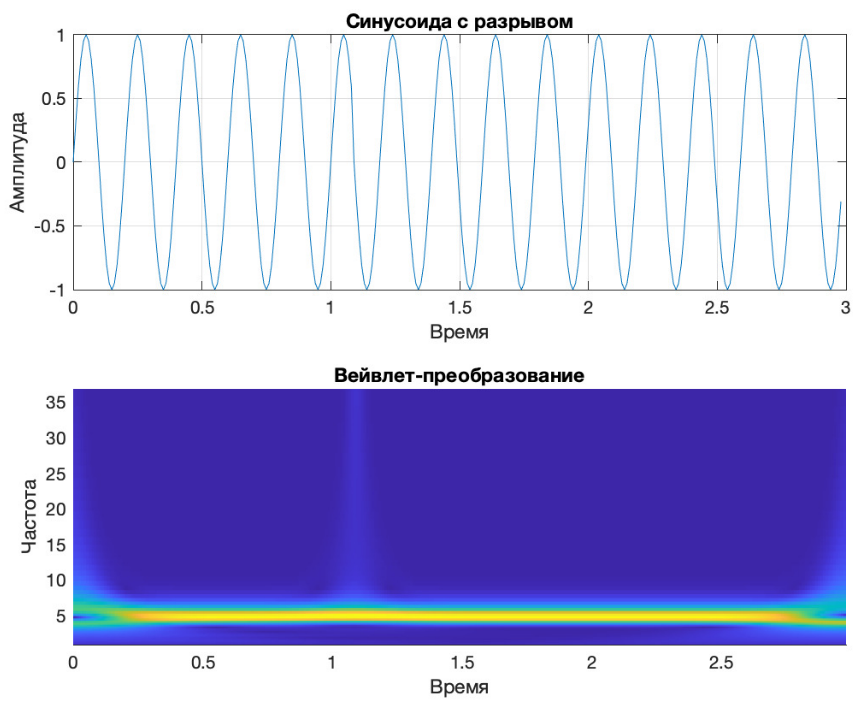

Рис. 9 – Поиск разрыва функции с помощью вейвлет-преобразования

дального сигнала, и это никак не заметно на графике во временной области. Я думаю, вы понимаете, что преобразование Фурье в этом случае тоже ничего не покажет (можете проверить, построив ДПФ от сигнала `x`). Зато на графике вейвлет-преобразования в районе отсчёта с индексом 100 (момент времени *1 с*) явно виден всплеск.

Мы рассмотрели самые базовые понятия о вейвлет-преобразовании. На самом деле, его область применения очень широка: спектральный анализ, анализ данных, сжатие данных, удаление шумов, обработка изображений и многое другое, но об этом в другой раз.

4 Задания к семинару

1. Построить семейство (минимум 5 штук на графике) вейвлетов Морле, «Мексиканская шляпа», Хаара, Добеши.

2. Провести спектральный анализ нестационарного сигнала, в составе которого имеется минимум 5 частотных составляющих, часть из которых присутствуют одновременно.

3. Изучить пакет `waveletAnalyzer` Matlab и провести сего помощью анализ сигнала из задания 2 (использовать 2 любых вейвлета).

4. Изучить функцию `wdenoise` Matlab и очистить произвольный сигнал от шума с помощью вейвлет-преобразования.