МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Учебно-методический комплект по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Конспект лекции «Алгоритм Гёрцеля»

В.В. Леонидов

МГТУ имени Н.Э. Баумана

1 Введение

При спектральном анализе иногда нет необходимости в вычислении полного спектра исследуемого сигнала. Зачастую нас интересует одна или две его частотные составляющие. Реализовывать ради этого полноценный алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) – довольно избыточно и затратно по времени (приходится производить большое количество ненужных вычислений). Один из выходов – использовать вместо БПФ обычное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и рассчитывать только частотные составляющие с нужными индексами m:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nm/N} \tag{1}$$

Но есть ещё более простой и быстрый путь – это **алгоритм Гёрцеля**.

2 Алгоритм Гёрцеля

Данный алгоритм реализуется с помощью БИХ-фильтра-резонатора второго порядка, передаточная характеристика которого имеет вид:

$$H_G[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1 - e^{-j2\pi m/N}z^{-1})}{1 - 2cos(2\pi m/N)z^{-1} + z^{-2}} \tag{2}$$

Разностное уравнение БИХ-фильтра Гёрцеля выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} y[n] = u[n] - e^{-j2\pi m/N}u[n-1], \text{ где} \\ u[n] = 2cos(\frac{2\pi m}{N}) \cdot u[n-1] - u[n-2] + x[n] \end{gathered} \tag{3}$$

Уравнение (3) можно представить в виде структурной схемы, которая показана на рисунке 1.

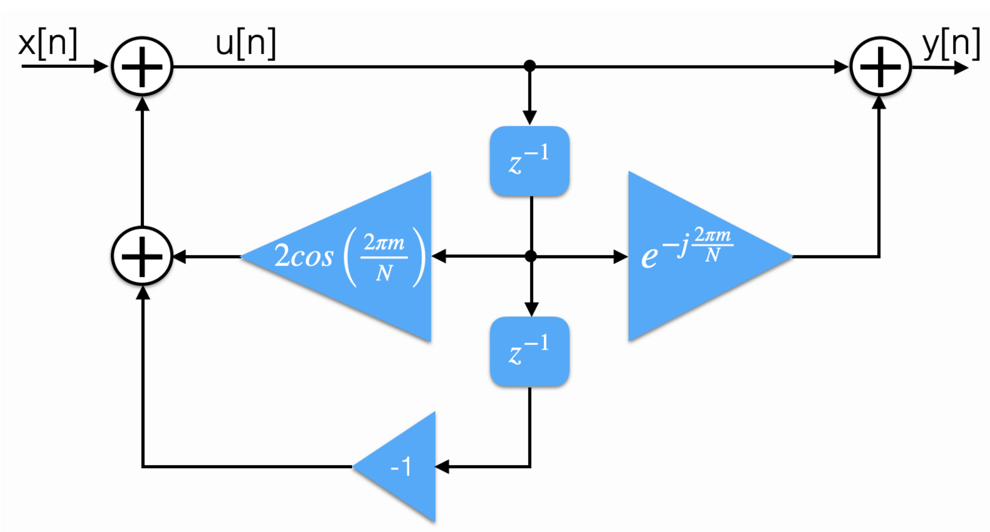

Рис. 1 – Структурная схема БИХ-фильтра Гёрцеля

Расчёт значения $y[n]$ из уравнения (3) производится только один раз, после того, как было произведено N расчётов $u[n]$. Итого, для вычисления одной частотной составляющей действительного сигнала с помощью алгоритма Гёрцеля требуется $N+2$ операции умножения и $2N+1$ операций сложения, если не считать расчёт констант $e^{-j2\pi m/N}$ и $2cos(\frac{2\pi m}{N})$. Для сравнения: в случае расчёта одного бина ДПФ действительного сигнала требуется $2N$ операций умножения и $4N$ операций сложения, и, вдобавок к этому, необходимо хранить в памяти целую таблицу констант – поворотных коэффициентов. Если считать только затраты на математические операции, алгоритм Гёрцеля почти два раза эффективнее расчёта одного бина ДПФ. Также, нас никто не заставляет брать отсчёты всего сигнала целиком – достаточно взять N такое, что в анализируемый сигнал попадёт целое число периодов искомой частоты. И ещё один момент – N не обязательно должно быть степенью двойки (в отличие от БПФ).

3 Реализация алгоритма Гёрцеля

Настало время рассмотреть пример. Создадим сигнал, в котором есть две синусоидальные составляющие: одна с частотой *1 кГц* амплитудой *1*, вторая – с частотой *2 кГц* и амплитудой *0.5*. Для начала рассчитаем значение одной из частотных составляющих с индексом `m` через один бин ДПФ аналогично тому, как делали на лекции по ДПФ, чтобы использовать полученный результат как эталонный:

Листинг 1 – Сравнение результатов ДПФ и алгоритма Гёрцеля, часть 1

```
clear, clc, close all

%% Формируем сигнал из двух гармоник
fs = 8000;
ts = 0 : 1/fs : 0.001-1/fs;
N = length(ts);

x = sin(2*pi*1000*ts) + 0.5*sin(2*pi*2000*ts+3*pi/4);

S = 2*abs(fft(x))/N;
f = 0: fs/N : fs-fs/N;
stem(f,S), grid on, title ('БПФ исходного сигнала')
xlabel('Частота'), ylabel('Амплитуда')

%% Считаем через один отсчёт ДПФ
X = 0;
m = 2;
for n = 1 : N
    X = X + x(n)*(cos(2*pi*(n-1)*(m-1)/N)-1i*sin(2*pi*(n-1)*(m-1)/N));
end

```

```
X = 2*abs(X)/N;      % нормирование амплитуды

% отображение результата
disp(" Расчёт через один бин ДПФ:")
disp(X)
```

В консоли Matlab увидим что-то вроде:

Расчёт через один бин ДПФ:

0.5000

Всё сходится, по запрашиваемому нами индексу действительно частотная составляющая с амплитудой 0.5 (в этом также можно убедиться по графику БПФ – рисунок 2)

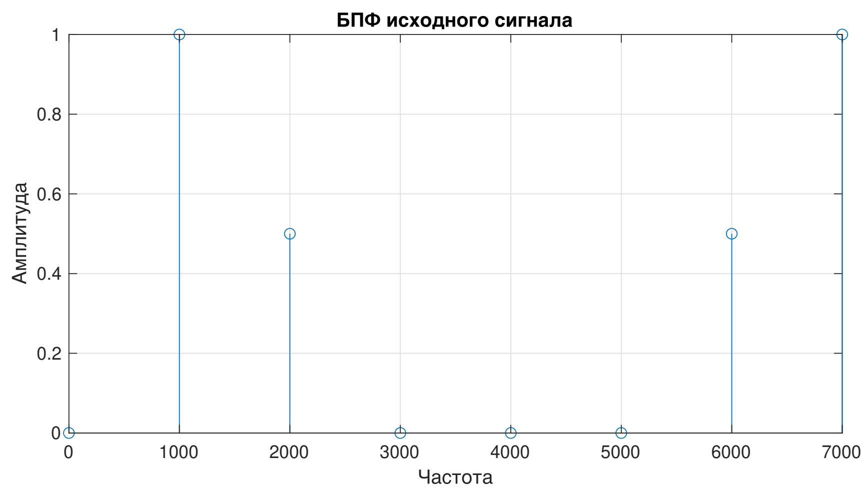

Рис. 2 – БПФ анализируемого сигнала

А теперь попробуем реализовать алгоритм Гёрцеля. Запишем разностное уравнение (3):

Листинг 2 – Сравнение результатов ДПФ и алгоритма Гёрцеля, часть 2

```
%% Алгоритм Гёрцеля
u1 = 0;
u2 = 0;
w = 2*pi*(m-1)/N;
for n = 1:N
    u0 = 2*cos(w)*u1-u2+x(n);
    u2 = u1;
    u1 = u0;
end
y = u0 - exp(-1i*w)*u2;

```

```
Y = 2*abs(y)/N;      % нормирование амплитуды
disp(" Расчёт через алгоритм Гёрцеля:")
disp(Y)
```

И что мы видм в консоли Matlab?

Расчёт через алгоритм Гёрцеля:

0.5000

Тот же самый результат! Можете поменять индекс `m` и убдеиться, что другие частотные составляющие также определяются правильно.

Давайте модифицируем наш код так, чтобы входным параметром был не индекс частоты, а её значение в Герцах, а заодно попробуем воспользоваться функцией `goertzel` Matlab и сравним её результаты с нашими:

Листинг 3 – Алгоритм Гёрцеля

```
%% Алгоритм Гёрцеля
fg = 2000;           % искомая частота
m = fg/fs*N+1;       % вычисление индекса частоты

u1 = 0;
u2 = 0;
w = 2*pi*(m-1)/N;
for n = 1:N
    u0 = 2*cos(w)*u1-u2+x(n);
    u2 = u1;
    u1 = u0;
end
y = u0 - exp(-1i*w)*u2;

Y = 2*abs(y)/N;      % нормирование амплитуды
disp(" Амплитуда частотной составляющей fg:")
disp(Y)

H = goertzel(x,m);
H = 2*abs(H)/N;
disp(" Результат выполнения стандартной функции Matlab:")
disp(H)
```

Получим результат:

Амплитуда частотной составляющей fg:

0.5000

Результат выполнения стандартной функции Matlab:

0.5000

Следует отметить, что переменная m в выражении (3), которая определяет резонансную частоту фильтра Гёрцеля, также может принимать и любые дробные значения в диапазоне от 0 до $N-1$, но на практике этого стараются избегать.

4 АЧХ фильтра Гёрцеля

Теперь давайте проанализируем АЧХ фильтра Гёрцеля. Для этого через фильтр Гёрцеля с резонансной частотой *2 кГц* пропустим синусоидальный сигнал с линейно меняющейся частотой от *1 Гц* до частоты Найквиста *4 кГц* и посмотрим, что из этого выйдет:

Листинг 4 – Определение АЧХ фильтра Гёрцеля

```
clear, clc, close all

fs = 8000;
ts = 0 : 1/fs : 0.005-1/fs;
N = length(ts);

fg = 2000;           % резонансная частота фильтра Гёрцеля
m = fg/fs*N+1;       % вычисление индекса резонансной частоты

y = zeros(1,fs/2);
% фильтр Гёрцеля
for k = 1:fs/2
    x = sin(2*pi*k*ts);
    y(k) = goertzel(x,m);
end

% получение массивов амплитуд и частот
Y = 2*abs(y)/N;
f = 1:fs/2;

% график
plot(f,Y), grid on
title('АЧХ фильтра Гёрцеля с резонансной частотой 2 кГц')
xlabel('Частота'), ylabel('Амплитуда')
```

А вышло то, что показано на рисунке 3.

Рис. 3 – АЧХ фильтра Гёрцеля с резонансной частотой 2 кГц

Как видно из рисунка, АЧХ фильтра Гёрцеля напоминает всё тот же кардинальный синус $|sin(x)/x|$, которым аппроксимируется один бин ДПФ (это мы проходили на одной из прошлых лекций).

5 Выводы

Если требуется проанализировать M частотных составляющих в сигнале из N отсчётов, то при $M < \log_2 N$ алгоритм Гёрцеля эффективнее, чем БПФ. Помимо этого, алгоритм Гёрцеля требует меньше памяти для хранения констант. Обработка входного сигнала может происходить потоково, с приходом его первого отсчёта, в то время как для расчёта БПФ требуется полный набор отсчётов, количество которых должно быть кратно степени двойки.