МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Учебно-методический комплект по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Конспект лекции «Преобразование Гильберта»

В.В. Леонидов

МГТУ имени Н.Э. Баумана

1 Аналитический сигнал

В жизни мы обычно имеем дело с действительными сигналами (ток, напряжение, мощность и т.п.), однако иногда удобно представлять их в виде набора комплексных чисел. Это позволяет точно оценить амплитуду сигнала, его фазу, знак частоты (положительная или отрицательная). Также, для обработки комплексных чисел имеется мощный математический аппарат. Комплексные сигналы широко применяются в цифровой обработке сигналов: получение огибающей, определение мгновенной частоты, квадратурная модуляция, системы связи, обработка радиолокационных сигналов и другое.

Давайте сразу перейдём к примеру. Создадим сигнал `x[n]`, который представляет из себя косинусоиду частотой *1 кГц*, затем создадим второй сигнал, сдвинутый относительно `x[n]` на 90° (или синусоиду) и назовём его `y[n]`:

Листинг 1 – Создание аналитического сигнала, часть 1

```
clear, clc, close all

Fs = 40000;                      % частота дискретизации
ts = 0 : 1/Fs : 0.005-1/Fs;      % временные отсчёты

x = cos(2*pi*1000*ts);
y = sin(2*pi*1000*ts);

subplot(2,1,1)
plot(x), grid on, title('x[n]')
xlabel('Время')
ylabel('Амплитуда')

subplot(2,1,2)
plot(x), grid on, hold on, title('x[n] и y[n]')
plot(y), grid on
xlabel('Время')
ylabel('Амплитуда')
```

Полученные сигналы показаны на рисунке 1. Теперь построим график в трёхмерной системе координат, по оси x будет исходный сигнал `x[n]` (действительная часть), по оси y сигнал `y[n]` (мнимая часть), по оси z – время. Также на отдельных графиках покажем проекции полученного сигнала на каждую из плоскостей трёхмерной системы координат:

Листинг 2 – Создание аналитического сигнала, часть 2

```
figure
subplot(2,2,1)
```

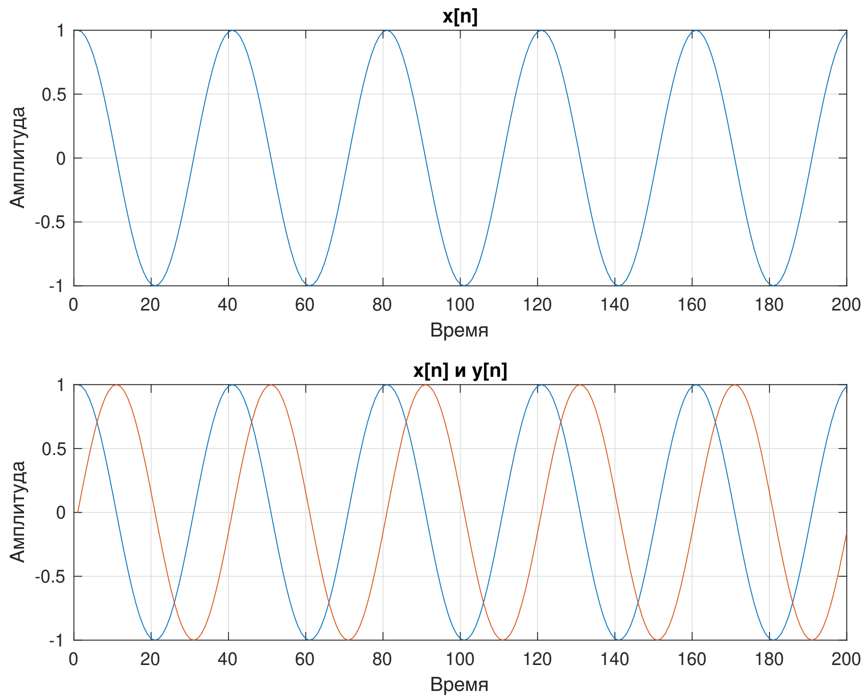

Рис. 1 – Исходный сигнал и сигнал, сдвинутый на 90°

```
plot3(x,y,ts), grid on, title('Аналитический сигнал')
xlabel('Мнимая часть')
ylabel('Действительная часть')
zlabel('Время')

subplot(2,2,2)
plot(x,y), grid on, title('Проекция x-y')
xlabel('Действительная часть')
ylabel('Мнимая часть')

subplot(2,2,3)
plot(x,ts), grid on, title('Проекция x-z')
xlabel('Действительная часть')
ylabel('Время')

subplot(2,2,4)
plot(y,ts), grid on, title('Проекция y-z')
xlabel('Мнимая часть')
ylabel('Время')
```

Запускаем скрипт и анализируем полученные результаты (рисунок 2). Рассмотрим первый график: мы ви-

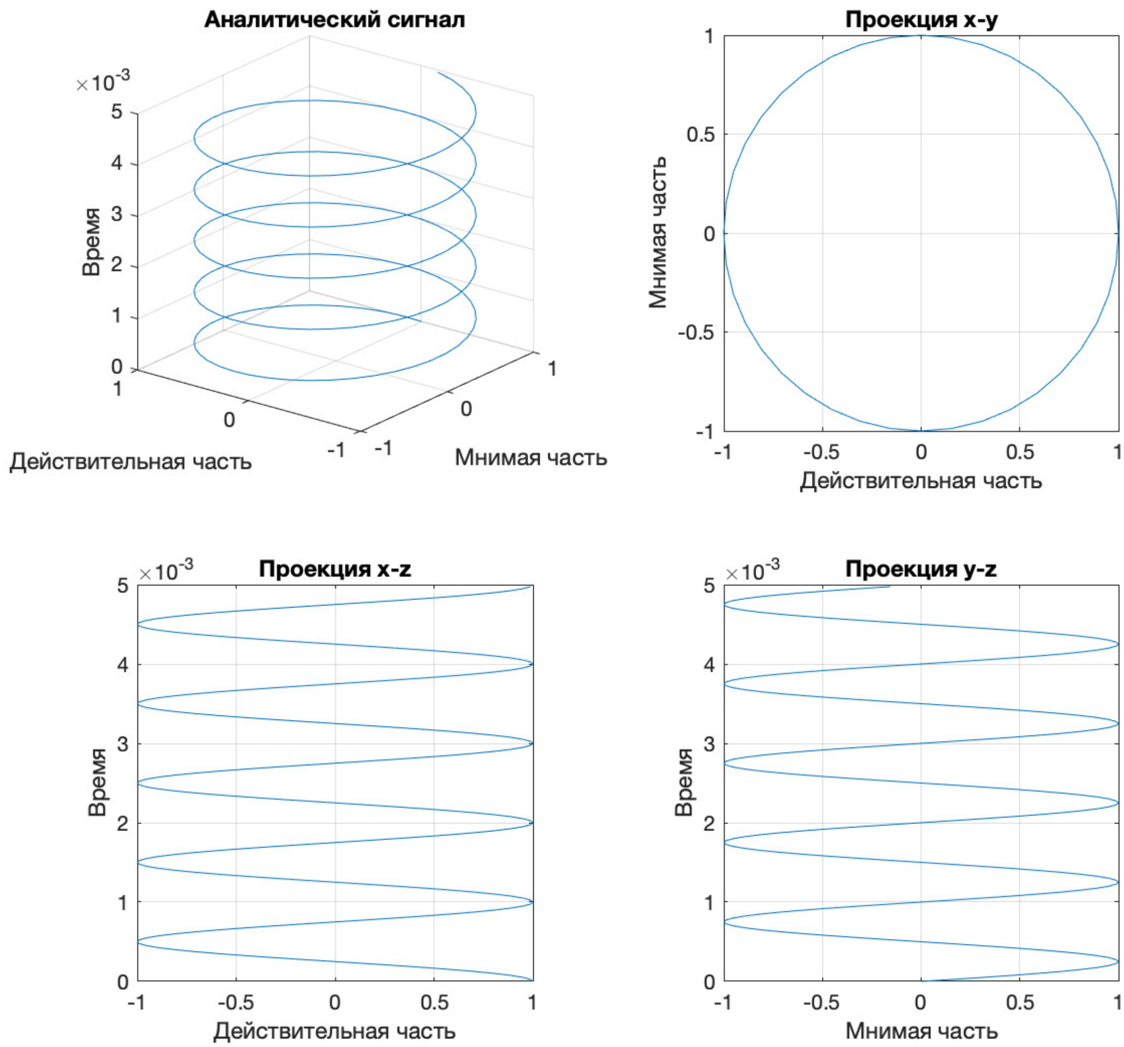

Рис. 2 – Аналитический сигнал

дим спираль, вращающуюся вокруг начала координат в плоскости x-y и поднимающуюся «вверх» вдоль оси z. Спираль вращается против часовой стрелки, это значит, что частота сигнала положительная. Правее показана окружность – это проекция данной спирали на плоскость x-y. Радиус данной окружности не изменяется и равен единице, а значит и амплитуда нашего сигнала на протяжении всего времени также не изменяется и равна единице. Ниже показаны проекции спирали на плоскости y-z и x-z: это и есть наши исходные косинусоидальный и синусоидальный сигналы.

Таким образом, любой дискретный сигнал можно представить в виде набора комплексных чисел:

$$S[n] = I[n] + jQ[n] \tag{1}$$

где:

- $I[n]$ – *In-Phase* – синфазная составляющая (действительная часть сигнала)
- $Q[n]$ – *Quadrature* – квадратурная составляющая (мнимая часть сигнала)

Мы уже работали с комплексными числами, когда анализировали результаты ДПФ. Например, для расчёта амплитуды сигнала необходимо найти модуль комплексного числа $S[n]$:

$$|S[n]| = \sqrt{I^2[n] + Q^2[n]} \tag{2}$$

А для расчёта фазы сигнала необходимо рассчитать арктангенс:

$$\phi[n] = \operatorname{arctg} \frac{Q[n]}{I[n]} \tag{3}$$

Теперь предположим что,

$$S[n] = A \cdot cos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{4}$$

где f_0 – несущая частота сигнала, ϕ – его фаза. Вспомним курс тригонометрии:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \tag{5}$$

И преобразуем выражение (4):

$$A \cdot cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(\phi) - A \cdot \sin(2\pi f_0 t) \cdot \sin(\phi) \tag{6}$$

Т.к. для комплексных чисел справедливо:

$$I = A \cdot \cos(\phi) \tag{7}$$

$$Q = A \cdot \sin(\phi) \tag{8}$$

Делаем замену в выражении (6):

$$A \cdot cos(2\pi f_0 t + \phi) = I \cdot cos(2\pi f_0 t) - Q \cdot sin(2\pi f_0 t) \tag{9}$$

И получаем ещё одну форму записи аналитического сигнала:

$$S[n] = I[n] \cdot cos(2\pi f_0 t) - Q[n] \cdot sin(2\pi f_0 t) \tag{10}$$

Что такое аналитический сигнал – немного разобрались, теперь нужно понять, как его получить из привычного нам действительного сигнала. Эту задачу помогает решить **дискретное преобразование Гильберта**.

2 Дискретное преобразование Гильберта

Дискретное преобразование Гильберта представляет собой процедуру, которая на основе исходного сигнала $x[n]$ формирует сигнал $x_h[n]$, сдвинутый по фазе относительно $x[n]$ на 90°. Иными словами: данное преобразование представляет собой идеальный фазовращатель на 90°, который называется **фильтром Гильберта**.

Двигать фазу будем с помощью КИХ-фильтра. На предыдущих лекциях мы рассмотрели операцию свёртки, в случае с преобразованием Гильберта её можно записать следующим образом:

$$x_h[n] = x[n] * h[n] \tag{11}$$

где $h[n]$ – импульсная характеристика фильтра Гильберта, а $*$ обозначает операцию свёртки. Тогда, по теореме о свёртке, ДПФ выходного сигнала преобразования Гильберта есть произведение ДПФ исходного сигнала и ДПФ фильтра Гильберта:

$$X_h[\omega] = X[\omega] \cdot H[\omega] \tag{12}$$

Исходя из задачи сдвинуть фазу сигнала на 90°, можно сформулировать следующие требования к фильтру $H[\omega]$:

1. Все компоненты $X[\omega]$ с положительными частотами должны быть сдвинуты на $-90°$
2. Все компоненты $X[\omega]$ с отрицательными частотами должны быть сдвинуты на $+90°$

Или, если записать это в виде математического выражения:

$$H[\omega] = \begin{cases} j, & \text{при } \omega < 0. \\ 0, & \text{при } \omega = 0. \\ -j, & \text{при } \omega > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Графическое представление АЧХ и ФЧХ $H[\omega]$ из выражения (13) показано на рисунке 3. Следует обратить внимание, что т.к. $H[0] = 0$, преобразование Гильберта убирает из сигнала постоянную составляющую.

Возьмём аналитический сигнал:

$$s[n] = x[n] + jx_h[n] \tag{14}$$

Спектр данного сигнала с учётом (12) будет иметь вид:

$$S[\omega] = X[\omega] + jX_h[\omega] = X[\omega] + jX[\omega] \cdot H[\omega] \tag{15}$$

Подставим в это выражение $H(\omega)$ из выражения (13), в результате получим:

$$S[\omega] = \begin{cases} X[\omega] + j \cdot j \cdot X[\omega], & \text{при } \omega < 0. \\ X[0], & \text{при } \omega = 0. \\ X[\omega] - j \cdot j \cdot X[\omega], & \text{при } \omega > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Упростим выражение (16):

$$S[\omega] = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega < 0. \\ X[0], & \text{при } \omega = 0. \\ 2 \cdot X[\omega], & \text{при } \omega > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Из (17) можно сделать вывод: спектр аналитического сигнала при отрицательных частотах равен нулю, а при положительных частотах он равен спектру исходного сигнала, умноженному на 2. Т.к. постоянная составляющая нас не интересует, $S[0]$ вычислять не будем.

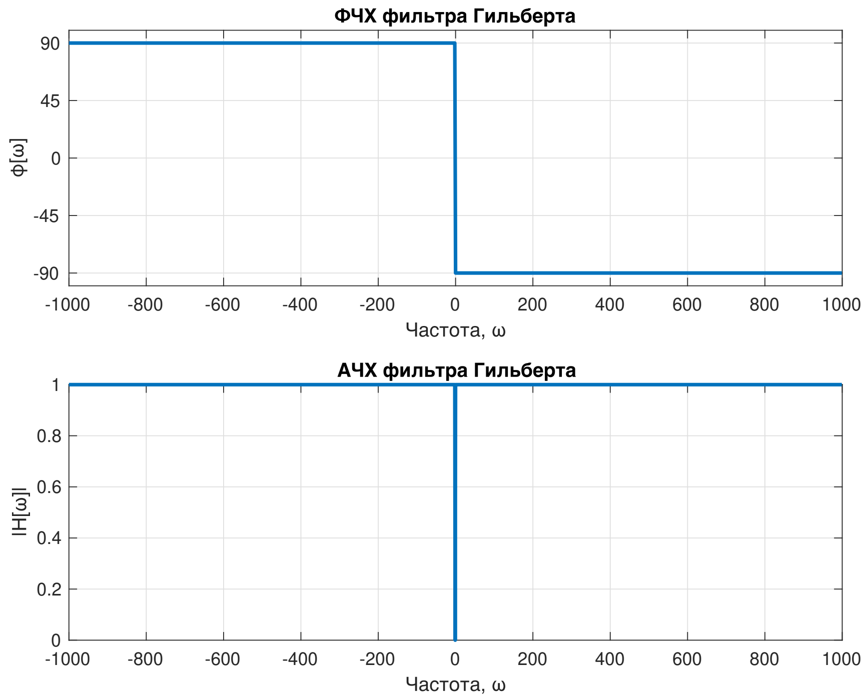

Рис. 3 – АЧХ и ФЧХ фильтра Гильберта

На основе вышесказанного разработаем алгоритм. Чтобы получить аналитический сигнал $s[n]$, заданный в выражении (14), из действительного сигнала $x[n]$, необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Вычислить ДПФ от сигнала $x[n]$, в результате чего будет получен сигнал $X[\omega]$.
2. Определить индексы отрицательных f_n и положительных f_p частот $X[\omega]$.
3. Умножить на ноль (или приравнять к нулю) элементы с отрицательными частотами: $S[f_n] = X[f_n] \cdot 0$.
4. Умножить на 2 элементы с положительными частотами: $S[f_p] = X[f_p] \cdot 2$.
5. Вычислить ОДПФ от полученного в п.3 и п.4 сигнала $S[\omega]$, в результате будет получен искомый сигнал $s[n]$.

Проверим на практике? Разработаем скрипт, реализующий данный алгоритм (привязка кода к пунктам указана в комментариях):

Листинг 3 – Вычисление аналитического сигнала с помощью ДПФ

```
clear, clc, close all

Fs = 40000;
ts = 0 : 1/Fs : 0.005-1/Fs;
N = length(ts);
```

```

% исходный сигнал
x = cos(2*pi*1000*ts);

% вычисление ДПФ, п. 1
X = fft(x);

% поиск индексов положительных и отрицательных частот, п. 2:
fp = 2:floor(N/2)+mod(N,2);      % первая половина частот ДПФ - положительные
fn = ceil(N/2)+1+~mod(N,2):N;    % вторая половина частот ДПФ - отрицательные

% применение выражения (17), п. 3 и п. 4:
S(fn) = X(fn)*0;
S(fp) = X(fp)*2;

% вычисление ОДПФ, п. 5:
s = ifft(S);

% строим графики:
subplot(2,1,1)
plot(x), grid on, title('Исходный сигнал x[n]')
xlabel('Время')
ylabel('Амплитуда')

subplot(2,1,2)
plot(real(s)), grid on, hold on
plot(imag(s)), grid on, title('Аналитический сигнал s[n]')
xlabel('Время')
ylabel('Амплитуда')
legend({'Действительная часть';'Мнимая часть'})
```

В результате выполнения скрипта получим графики, которые представлены на рисунке 4. Сверху – исходный сигнал $x[n]$, снизу – действительная и мнимая часть полученного аналитического сигнала $s[n]$. Можно сравнить графики, полученные в данном примере, с графиками из листинга 1 (рисунок 1). Результаты получились идентичные, из чего можно сделать вывод о корректности работы алгоритма.

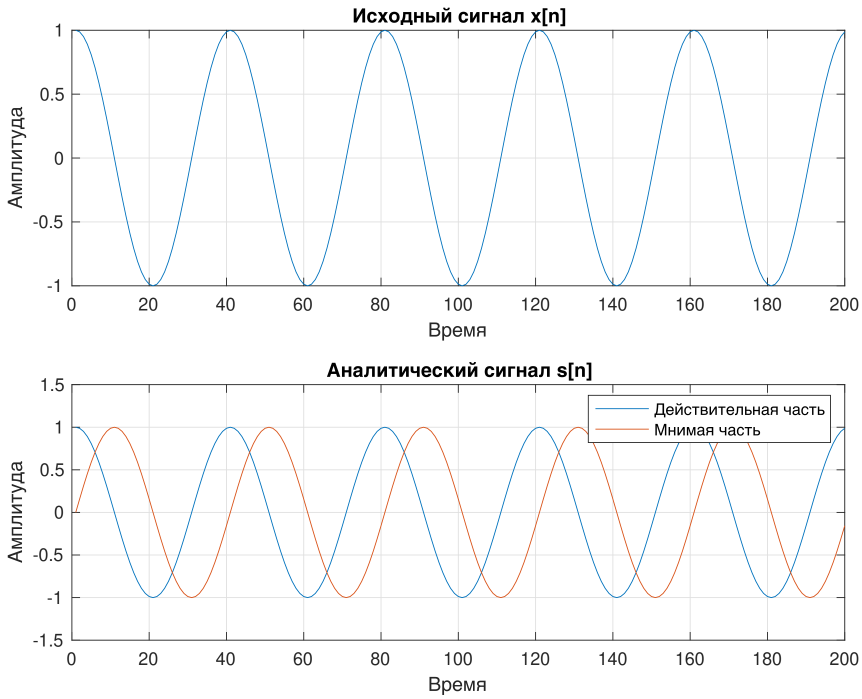

Рис. 4 – Вычисление аналитического сигнала с помощью ДПФ

3 Дискретный фильтр Гильберта

Для того, чтобы можно было использовать фильтр Гильберта как классический цифровой фильтр, нужно рассчитать его импульсную характеристику, а затем подставить её в выражение (11). Расчёт импульсной характеристики цифрового фильтра мы уже проводили на одной из предыдущих лекций: для этого нам нужно взять частотную характеристику фильтра $H[\omega]$ из выражения (13) и взять от неё ОДПФ.

Запишем выражение ОДПФ для непрерывного сигнала:

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \tag{18}$$

Вместо частоты в Герцах будем использовать круговую частоту: $\omega = 2\pi f$, тогда $df = d\omega\frac{1}{2\pi}$. Т.к. частотная характеристика дискретной системы периодична и повторяется с периодом частоты дискретизации f_s (или ω_s), пределы интегрирования установим от $-\omega_s/2$ до $+\omega_s/2$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega_s/2}^{+\omega_s/2} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{19}$$

Теперь разобьём интервал интегрирования на две области: $-\omega_s/2$ до 0 и от 0 до $+\omega_s/2$:

$$\begin{aligned} h(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_s/2}^{0} je^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\omega_s/2} -je^{j\omega t}d\omega = \\ = \frac{j}{2\pi jt}\left[e^{j\omega t}|_{-\omega_s/2}^{0} - e^{j\omega t}|_{0}^{+\omega_s/2}\right] = \\ = \frac{1}{2\pi t}\left[e^{j0} - e^{-j\omega_s t/2} - e^{j\omega_s t/2} + e^{j0}\right] = \\ = \frac{1}{2\pi t}\left[2 - 2\cos(\omega_s t/2)\right] = \frac{1}{\pi t}\left[1 - \cos(\omega_s t/2)\right] \end{aligned} \quad (20)$$

Следует обратить внимание, что при $t = 0$ получается неопределённость 0/0, решить её можно с помощью правила Бернулли—Лопиталя:

$$\lim_{t\to 0}\frac{[\cos(\omega_s t/2)]'}{(\pi t)'} = \lim_{t\to 0}\frac{\omega_s t sin(\omega_s t/2)}{2\pi} = 0 \quad (21)$$

Откуда можно сделать вывод, что $h(0) = 0$. Для дискретного сигнала результат выражения (20) будет выглядеть следующим образом:

$$h[n] = \frac{1}{\pi n t_s}\left[1 - \cos(\omega_s n t_s/2)\right] \text{ при } n \neq 0; h[n] = 0 \text{ при } n = 0 \quad (22)$$

Т.к. $\omega_s = 2\pi f_s$, а $t_s = 1/f_s$, получим:

$$h[n] = \frac{f_s}{\pi n}\left[1 - \cos(\pi n)\right] \text{ при } n \neq 0; h[n] = 0 \text{ при } n = 0 \quad (23)$$

Построим график импульсной характеристики фильтра Гильберта $h[n]$ для 32 отсчётов и $f_s = 1$:

Листинг 4 – Исследование фильтра Гильберта, часть 1

```
clear,clc,close all

N = 32;
n = -N/2:N/2-1;

h = 1./(pi*n).*(1-cos(pi*n));
h(N/2+1) = 0;

stem(n,h), grid on, title('Импульсная характеристика фильтра Гильберта')
xlabel('n'), ylabel('h[n]')
xlim([-N/2 N/2-1])
```

Результат представлен на рисунке 5. Теперь проанализируем АЧХ и ФЧХ полученного фильтра:

Листинг 5 – Исследование фильтра Гильберта, часть 2

```
figure;
% расчёт ДПФ и частотной оси
```

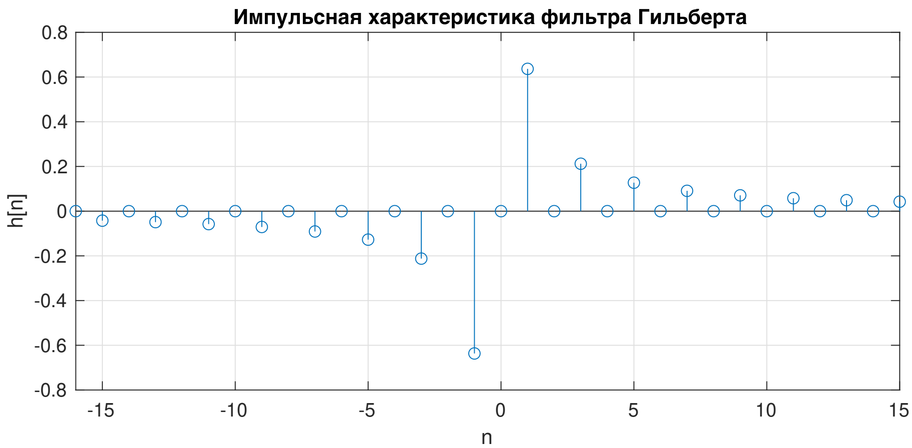

Рис. 5 – Импульсная характеристика фильтра Гильберта из 32 отсчётов

```
H = fft(h);
f = (-N/2:N/2-1)*1/N;
% так как мы сдвинули h по оси x из отрицательной области
% на половину его длины вправо,
% применяем теорему о сдвиге ДПФ:
H = H.*exp(-1i*2*pi*f*N/2);

subplot(2,1,1)
plot(f,abs(H),'o-'), grid on
title('АЧХ фильтра Гильберта')
xlabel('\omega/\pi')
ylabel('|H[\omega]|')

phases=[-90;-45;0;45;90];
subplot(2,1,2)
plot(f,angle(H)*180/pi,'o-'), grid on
title('ФЧХ фильтра Гильберта')
xlabel('\omega/\pi')
ylabel('\phi(\omega)')
set(gca, 'YTick', phases)
```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 6. Следует обратить внимание, что $H[0] = 0$ – это особенность КИХ-фильтра с антисимметричной импульсной характеристикой. В нашем случае количество отсчётов фильтра чётное, в случае нечётного количества отсчётов мы также будем наблюдать $H[\omega_s/2] = 0$. В связи с этим, на низких частотах АЧХ фильтра заваливается, что будет плохо сказываться на преобразовании низкочастотных составляющих. Также, в области полосы пропускания мы наблюдаем пульсации АЧХ – это

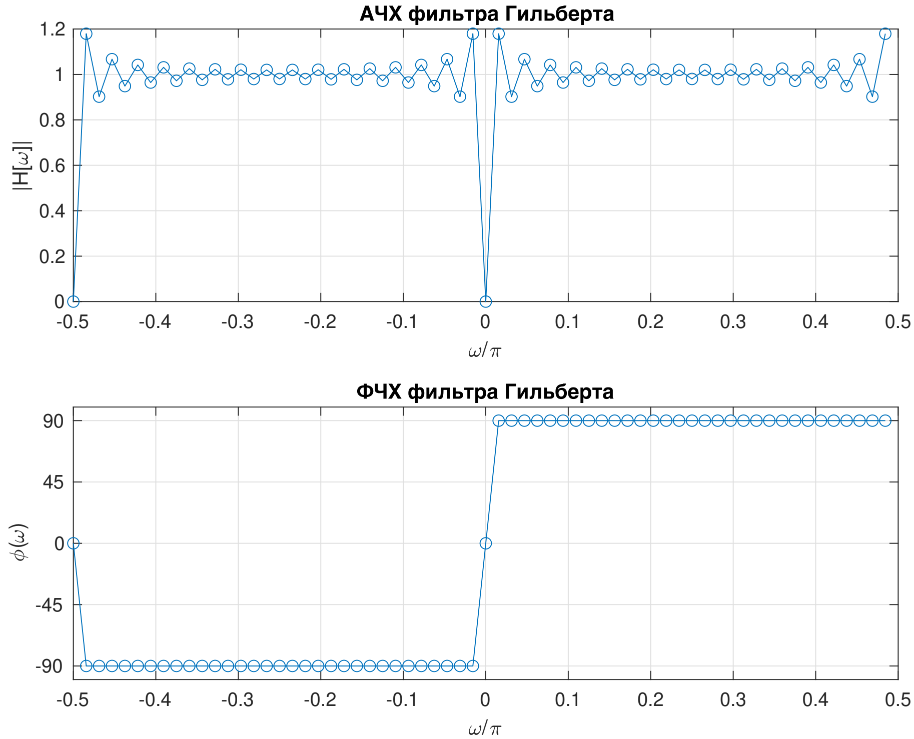

Рис. 6 – АЧХ и ФЧХ спроектированного фильтра Гильберта из 32 отсчётов

эффект Гиббса, который мы изучали на лекции по цифровым фильтрам. Как с этим бороться, мы уже знаем: увеличить порядок фильтра и использовать взвешивание окном. Что мы и сделаем: на рисунке 7 показаны АЧХ и ФЧХ фильтра Гильберта, взвешенного окном Хэмминга для $N = 32$, $N = 64$ и $N = 512$ отсчётов.

Из графиков видно, что увеличение количества отсчётов и взвешивание импульсной характеристики фильтра Гильберта окном приводит к улучшению АЧХ и ФЧХ фильтра. Теперь полученные коэффициенты можно смело подставлять в выражение (11) и вычислять преобразование Гильберта $x_h[n]$ через операцию свёртки.

Однако, есть ещё один момент: сигнал, прошедший через КИХ-фильтр, задерживается на $D = (K - 1)/2$ отсчётов, где K – порядок цифрового фильтра. Поэтому, чтобы скомпенсировать линейную фазовую задержку выходного сигнала $x_h[n]$ относительно входного $x[n]$, входной сигнал необходимо задержать на D отсчётов. Рассмотрим пример для фильтра Гильберта 128 порядка (листинг 6).

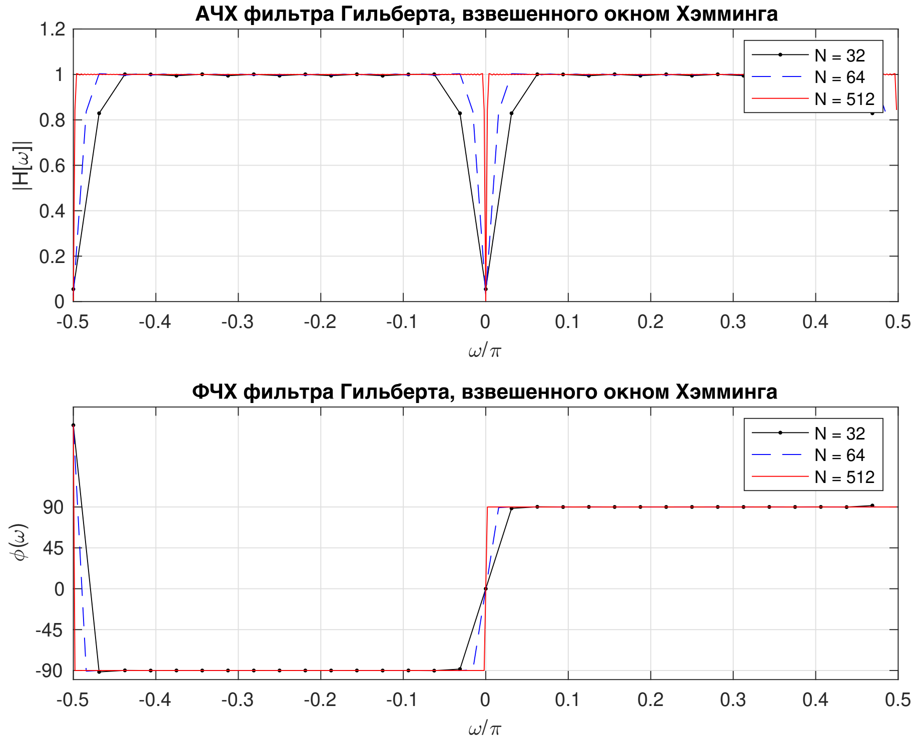

Рис. 7 – АЧХ и ФЧХ фильтра Гильберта, взвешенного окном Хэмминга для разного количества отсчётов

Листинг 6 – Применение разработанного фильтра Гильберта к сигналу *1кГц*

```
clear,clc,close all
Nh= 128;
n = -Nh/2:Nh/2-1;
h = 1./(pi*n).*(1-cos(pi*n));
h(Nh/2+1) = 0;
h = h.*hamming(Nh)';

% формируем сигнал с частотой кГц1
fs = 40000;
ts = 0 : 1/fs : 0.01-1/fs;
N = length(ts);
x = cos(2*pi*1000*ts);

% операция свёртки
y = conv(x,h);
% расчёт необходимой задержки основного сигнала
D = round((Nh-1)/2);
```

```
% временной сдвиг основного сигнала
xd = [zeros(1, D), x];

% отображение результатов
subplot(2,1,1)
plot(x), grid on, title('Исходный сигнал')
xlabel('Время')
ylabel('Амплитуда')
xlim([0 500])

subplot(2,1,2)
plot(xd), grid on, hold on
plot(y), title('Применение разработанного фильтра Гильберта к сигналу кГц1')
xlabel('Время')
ylabel('Амплитуда')
legend({'Действительная часть';'Мнимая часть'})
xlim([0 500])
```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 8. И графика видно, что сформированная мнимая

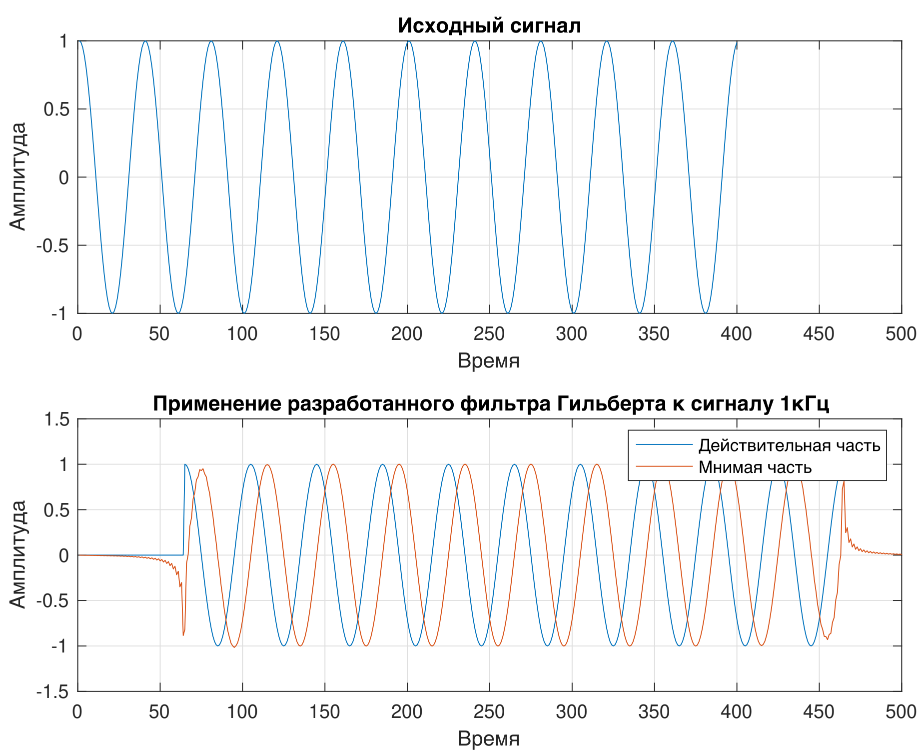

Рис. 8 – Применение разработанного фильтра Гильберта к сигналу *1кГц* и компенсация фазовой задержки часть сигнала (оранжевый график снизу) имеет задержку относительно начала координат на 63 отсчёта, на которую также была сдвинута действительная часть сигнала (синий график снизу). В результате получили два синусоидальных сигнала, сдвинутых друг относительно друга на 90°, которые являются компонентами аналитического сигнала.

4 Получение огибающей сигнала

Что такое преобразование Гильберта, разобрались. Но у многих наверняка до сих пор есть вопросы: «Зачем оно нужно? Ну получили сигнал, сдвинутый на 90°, и что?». Рассмотрим один из примеров применения: получение огибающей модулированного сигнала.

Создадим несущий сигнал частотой *1 кГц*, который будет модулирован частотой *50 Гц* и построим его график:

Листинг 7 – Получение огибающей сигнала, часть 1

```
clear, clc, close all

fs = 40000;
ts = 0 : 1/fs : 0.05-1/fs;
N = length(ts);

% несущая частота
fc = cos(2*pi*1000*ts);
% модулирующий сигнал
fm = sin(2*pi*50*ts);
% модулированный сигнал
x = fc.*fm;

plot(ts,x), grid on, title('Амплитудномодулированный- сигнал')
xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
```

График полученного сигнала показан на рисунке 9. Теперь разработаем ФНЧ со следующими параметрами:

- *Fs = 40000 Гц*
- *Fpass = 500 Гц*
- *Fstop = 2000 Гц*
- *Astop = 60 дБ*

Затем возьмём модуль модулированного сигнала `x` и применим к нему вышеуказанный фильтр (функцию фильтра я здесь показывать не буду, она генерируется с помощью пакета filterDesigner):

Рис. 9 – Несущая *1 кГц*, модулированная сигналом *50 Гц*

Листинг 8 – Получение огибающей сигнала, часть 2

```
%% Использование ФНЧ
lp_f = lp_filter;
y = filter(lp_f.Numerator,1,abs(x));

figure
plot(ts,x), grid on, hold on
plot(ts,y), ylim([-1 1])
title('Получение огибающей с помощью ФНЧ')
xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
legend({'Несущая частота';'Огибающая'})
```

Получим график, показанный на рисунке 10. Из графика видно, что огибающая (оранжевый сигнал) напо-

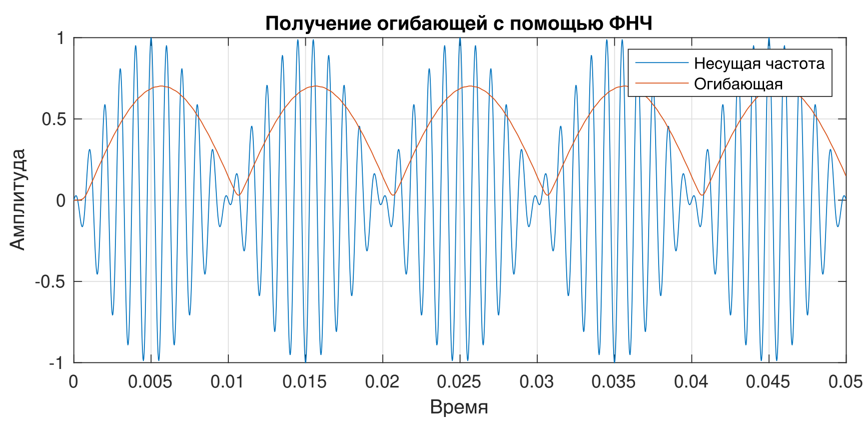

Рис. 10 – Получение огибающей с помощью ФНЧ

минает реальную огибающую нашего сигнала только отдалённо. Если мы будем менять параметры фильтра, мы всё равно не сможем получить идеальный сигнал, повторяющий модуль синусоиды *50 Гц* с единичной амплитудой. Попробуем применить полученные сегодня знания и получить огибающую сигнала с помощью преобразования Гильберта:

Листинг 9 – Получение огибающей сигнала, часть 3

```
%% Преобразование Гильберта
z = hilbert(x);      % стандартная функция SP Toolbox

figure
plot(ts,x), grid on, hold on
plot(ts,abs(z)), ylim([-1 1])
title('Получение огибающей с помощью преобразования Гильберта')
xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
legend({'Несущая частота';'Огибающая'})
```

Результат показан на рисунке 11.

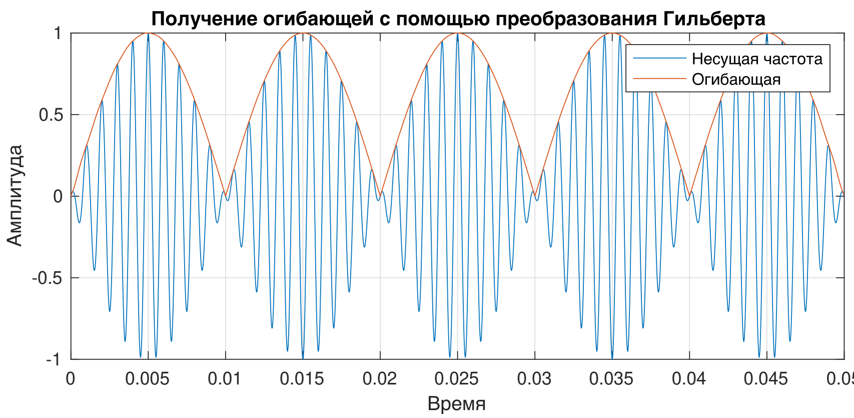

Рис. 11 – Получение огибающей с помощью преобразования Гильберта

Другое дело, правда?

5 Выводы

Итак, мы рассмотрели два способа расчёта аналитического сигнала:

1. Через прямое и обратное ДПФ.

2. Через операцию свёртки с использованием импульсной характеристики фильтра Гильберта.

Первый способ даёт меньше искажений, однако требует большего количества математических операций. Второй способ более простой с точки зрения вычислений, однако не обеспечивает полное подавление отрицательных частот и плохо работает в области низких частот.

Также на практике показали, как можно применить преобразование Гильберта для получения огибающей модулированного сигнала.